La vision mathématique du chaos :

Ailes de papillon, catastrophes et bifurcations

Journées Portes Ouvertes 2014

C.C. 8 février 2014 - La Rochelle

Rang	Spécialités[1]	Pourcentage de demandeurs d'emploi	Pourcentage de CDI	Taux d'insertion[2]	Salaire médian brut annuel
1	MATHÉMATIQUES	10%	83%	97%	31 000
2	INFORMATIQUE, TÉLÉCOMS, MULTIMÉDIA	11%	94%	98%	32 500
3	INFORMATIQUE DE GESTION	11%	94%	97%	32 000
4	ELECTRONIQUE	13%	89%	93%	29 900
5	INDUSTRIE, PRODUCTION	16%	85%	95%	32 400
6	COMMERCE, COMMERCE INTERNATIONAL	17%	83%	96%	30 000
7	PHYSIQUE, SCIENCES DE LA TERRE	18%	85%	92%	25 000
8	SANTÉ, ACTION SOCIALE	18%	54%	94%	20 400
9	COMPTABILITÉ, GESTION	19%	83%	95%	30 800
10	FINANCE, BANQUE, ASSURANCES	21%	86%	91%	28 000
11	MARKETING	21%	80%	94%	28 000
12	RESSOURCES HUMAINES, ADMINISTRATION	21%	64%	94%	23 400
13	GÉOGRAPHIE, AMÉNAGEMENT, URBANISME	21%	40%	90%	22 000
14	CHIMIE, SCIENCES DE LA VIE	22%	52%	92%	29 900
15	LANGUES, LETTRES, DOCUMENTATION	23%	75%	89%	21 600
16	ECONOMIE	23%	68%	90%	24 700
17	DROIT, SCIENCES POLITIQUES	23%	65%	89%	25 200
18	PSYCHOLOGIE, SOCIOLOGIE	25%	70%	89%	19 600
19	EDUCATION, FORMATION	25%	47%	94%	18 000
20	ARTS, ÉDITION, COMMUNICATION	37%	64%	93%	22 000

source : Le Nouvel Observateur

Le chaos ?

Ensemble de choses sans dessus dessous et donnant l'image de la destruction, de la ruine, du désordre.

État de confusion générale

Le chaos ?

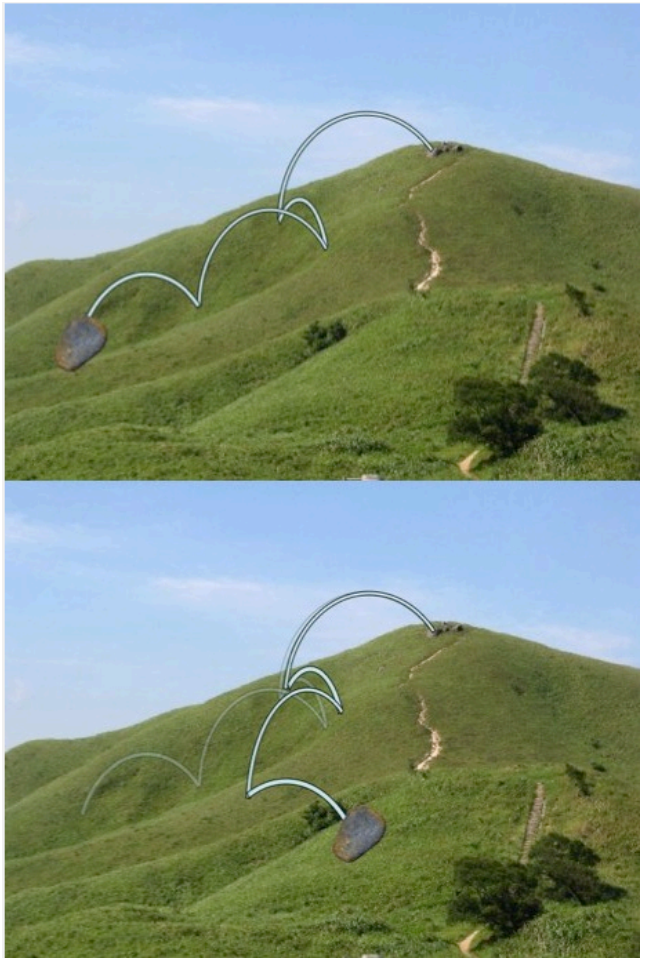
Le chaos ?

L'idée générale

Un système chaotique est un système
dynamique
gouverné par des lois connues
"sensible" aux conditions initiales.

- Un objet mobile.
- Un groupe d'animaux.
- Une maladie se propageant.
- L'océan.
- Un stimulus dans le réseau neuronal.
- La goutte d'eau sur le dos de la main.
- ...

Un système chaotique est un système
dynamique
gouverné par des lois connues
"sensible" aux conditions initiales.



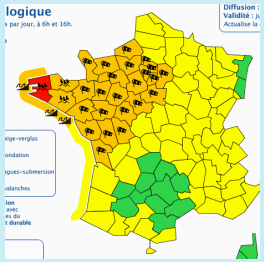
$\hookrightarrow$ **difficultés de prédictibilité !**

Le chaos ?

Les exemples et contre-exemples typiques ?

Chaotique

"La météo est un système chaotique".

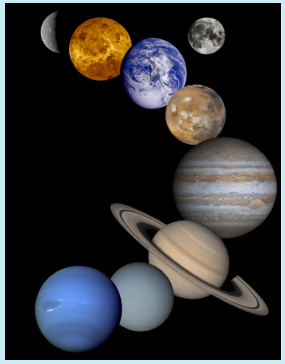


- Il n'y a plus de saisons ma bonne dame.
- "Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas ?"

E. Lorenz, MIT, 1972.

Non chaotique

"La position des planètes est un système non chaotique".



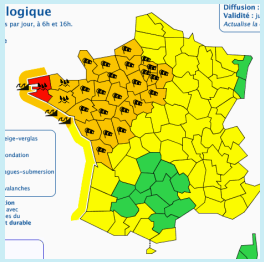
- Le prochain passage en périhélie de la comète de Halley aura lieu le 28 juillet 2061.

Le chaos ?

Les exemples et contre-exemples typiques ?

Chaotique

"La météo est un système chaotique".

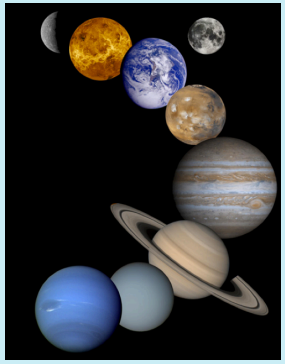


- Il n'y a plus de saisons ma bonne dame.
- "Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas ?"

E. Lorenz, MIT, 1972.

Non chaotique

"La position des planètes est un système non chaotique".



- Le prochain passage en périhélie de la comète de Halley aura lieu le 28 juillet 2061.

Des mathématiques pour aller au-delà de l'évidence de la non prédictibilité : contrôler les erreurs... mettre de l'ordre dans le désordre !

La stabilité du système solaire ?

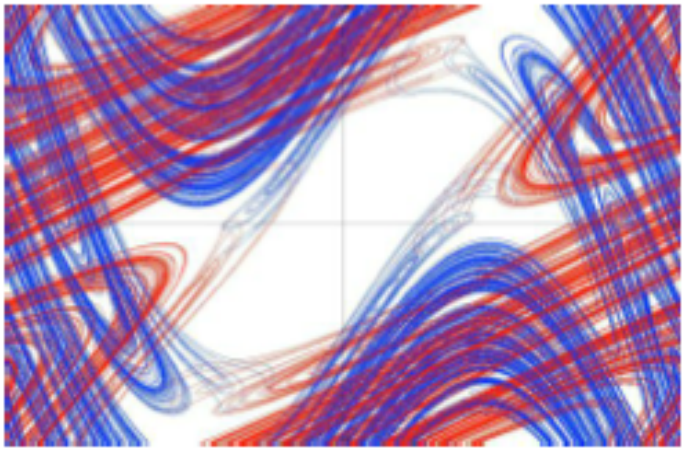
"En 1999, la Terre entrepose ses déchets nucléaires sur la Lune où elle a déjà installé une base lunaire nommée Alpha. Le 13 septembre, une explosion de ces stocks provoque une telle réaction en chaîne que la Lune quitte l'orbite terrestre puis le système solaire. Dans l'incapacité de regagner la Terre, les 311 survivants commandés par le charismatique commandant Koenig, errent sur l'astre dans le cosmos et affrontent toutes sortes de dangers."

Le problème des 3 corps, Soleil, Terre et Lune :

H. Poincaré, fin 19ème.

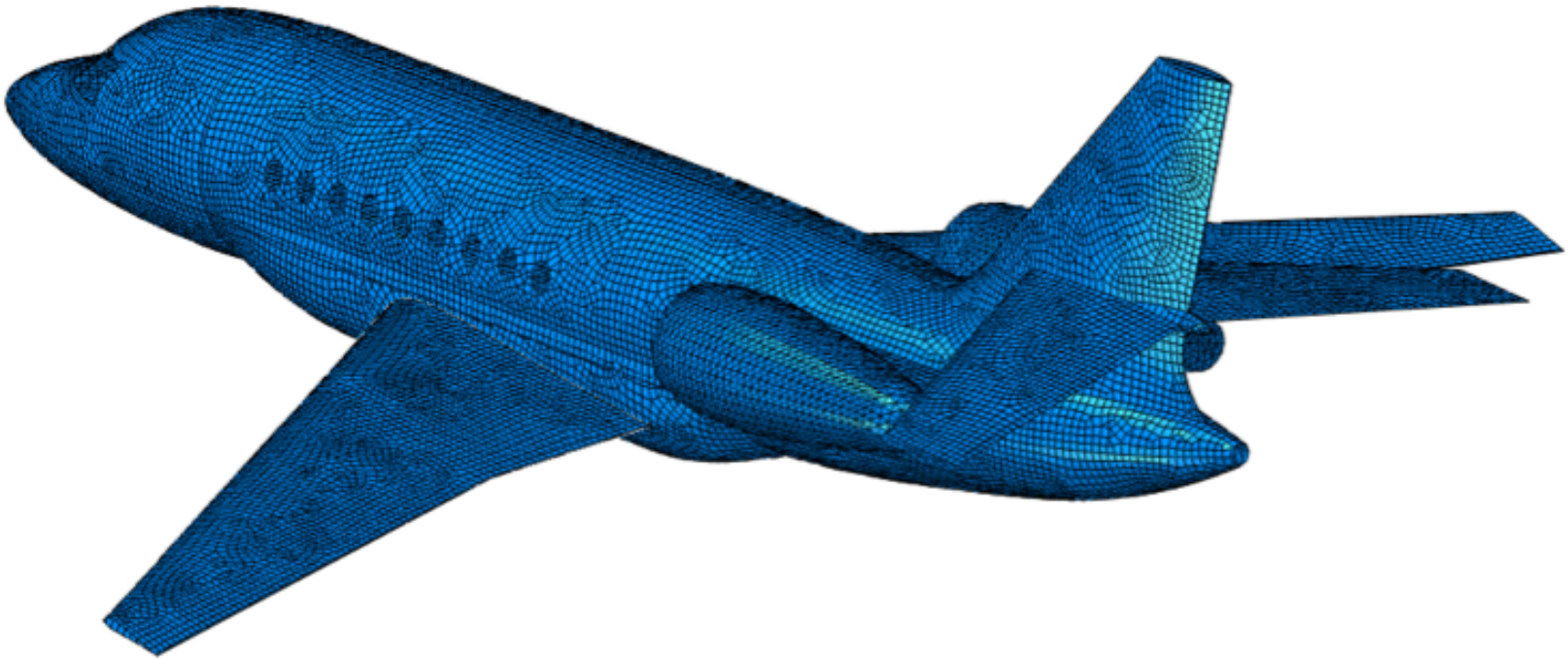
- Permet de ramener l'étude d'un système dynamique continu en dimension 3 à l'étude d'un système dynamique discret en dimension 2 par itérations.
- "Chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir couper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé par la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer."

- Bifurcation homocline :



Bifurcation :

`Point où une voie de communication se divise en deux autres voies.`
`Possibilité de choisir entre plusieurs orientations.`

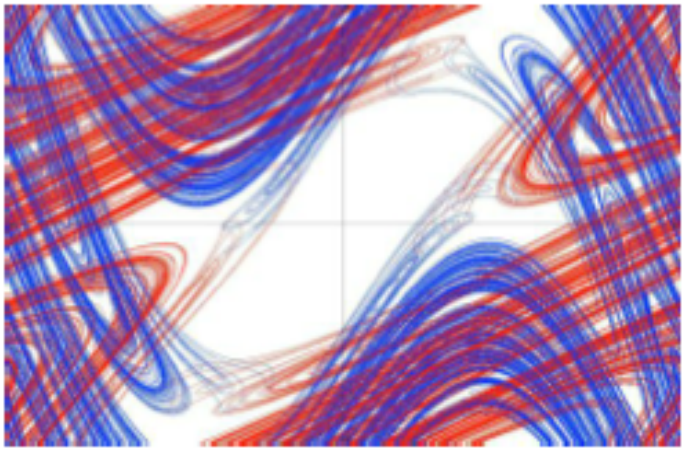


Le problème des 3 corps, Soleil, Terre et Lune :

H. Poincaré, fin 19ème.

- Permet de ramener l'étude d'un système dynamique continu en dimension 3 à l'étude d'un système dynamique discret en dimension 2 par itérations.
- "Chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir couper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé par la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer."

- Bifurcation homocline :



Bifurcation :

`Point où une voie de communication se divise en deux autres voies.`
`Possibilité de choisir entre plusieurs orientations.`

Le chaos ?

Première apparition ? J. Hadamard, 1898

39. Les circonstances que nous venons de rencontrer se retrouveront-elles dans d'autres problèmes de Mécanique? Se présenteront-elles, en particulier, dans l'étude des mouvements des corps célestes? C'est ce qu'on ne saurait affirmer. Il est probable, cependant, que les résultats obtenus dans ces cas difficiles seront analogues aux précédents, au moins par leur complexité.

S'il en était ainsi, il importe de remarquer que l'un des principaux problèmes de la Mécanique céleste, la question de la stabilité du système du monde, même sous son aspect théorique (c'est-à-dire réduite au mouvement de n points matériels s'attirant suivant la loi de Newton), cesserait d'avoir un sens.

Certes, lorsqu'un système se meut sous l'action de forces données et que les conditions initiales du mouvement ont des valeurs *données, au sens mathématique du mot,* le mouvement ultérieur et, par conséquent, la manière dont il se comporte, lorsque t augmente indéfiniment, sont par cela même connus. Mais, dans les problèmes astronomiques, il ne saurait en être ainsi : les constantes qui définissent le mouvement sont données *physiquement,* c'est-à-dire avec des erreurs dont l'amplitude se réduit à mesure que la puissance de nos moyens d'observation augmente, mais qu'il est impossible d'annuler.

Expérimentons le chaos !

Au programme aujourd'hui :

1. Une expérimentation calculatoire : **un modèle de démographie.**

2. Une expérimentation mécanique : **la machine à catastrophes de Zeeman.**

Un modèle de démographie

On va calculer par itérations l'effectif d'une population.

Appelons x_n l'effectif de la population au temps n. On adopte le modèle :

$$\boxed{x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)}$$

- μ est le taux de croissance.
- Si par exemple $\mu = 6$ et qu'au départ on a $x_0 = 0,01$ milliers de lapins (10 lapins !), au bout d'un an on a un peu moins de $0,06$ milliers de lapins...
- Modèle utilisé par les biologistes pour (tenter de) comprendre d'étranges évolutions de populations...

But : trouver quelle sera la population au bout d'un temps très long.

Intérêt : observer la transition d'une dynamique régulière vers le chaos.

Il faut donc calculer x_1, x_2, ..., x_{100}, ..., $x_{100000000}$, ..., x_∞ !

- **Force du mathématicien : déterminer le comportement limite sans calculer tous les termes !**
  Si la limite existe, c'est le point fixe x_f de la fonction $f(x) = \mu x(1-x)$:

$$f(x_f) = x_f.$$

- Force du présent modèle : une visualisation facile du comportement limite.

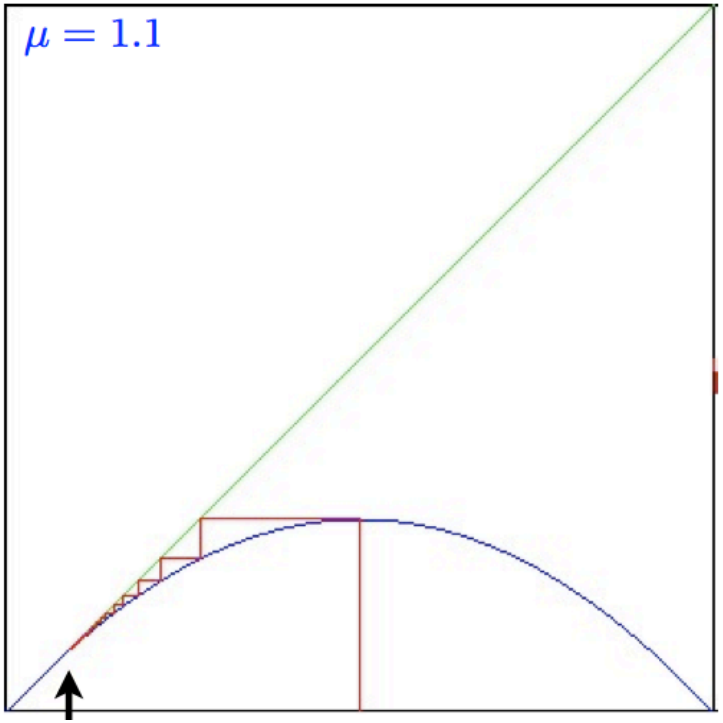
Il faut donc calculer x_1, x_2, ..., x_{100}, ..., $x_{100000000}$, ..., x_∞ !

- **Force du mathématicien : déterminer le comportement limite sans calculer tous les termes !**
  Si la limite existe, c'est le point fixe x_f de la fonction $f(x) = \mu x(1-x)$:

$$f(x_f) = x_f.$$

- Force du présent modèle : une visualisation facile du comportement limite.

Convergence vers une limite :



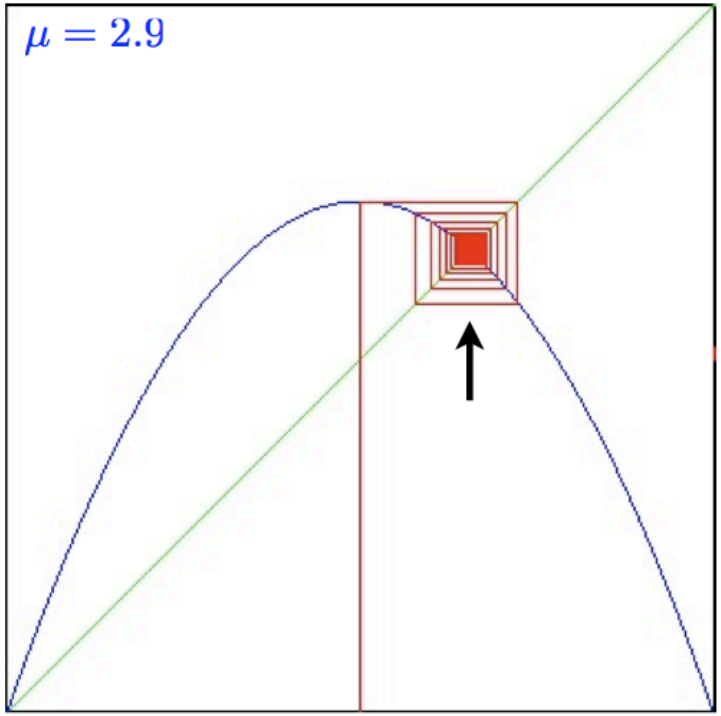
Il faut donc calculer x_1, x_2, ..., x_{100}, ..., $x_{100000000}$, ..., x_∞ !

- **Force du mathématicien : déterminer le comportement limite sans calculer tous les termes !**
  Si la limite existe, c'est le point fixe x_f de la fonction $f(x) = \mu x(1-x)$:

$$f(x_f) = x_f.$$

- Force du présent modèle : une visualisation facile du comportement limite.

Convergence vers une limite :



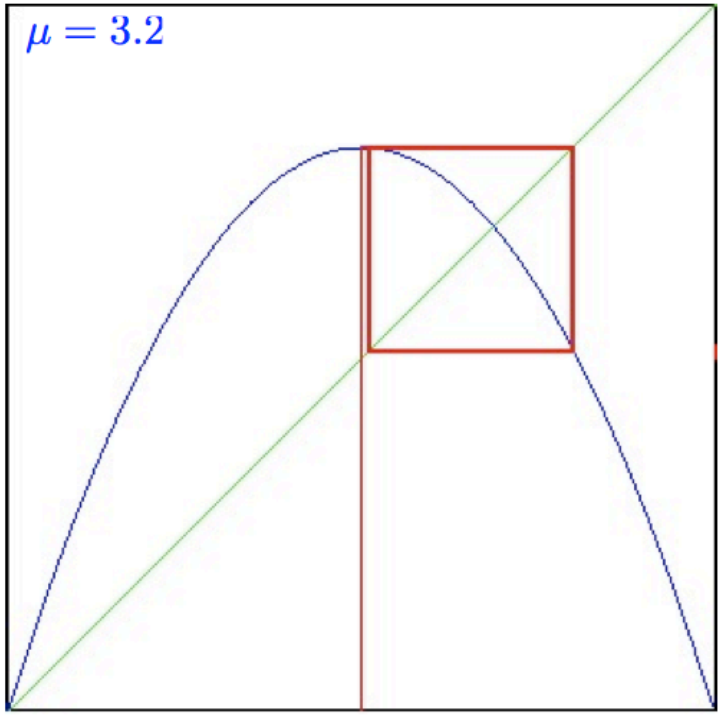
Il faut donc calculer x_1, x_2, ..., x_{100}, ..., $x_{100000000}$, ..., x_∞ !

- **Force du mathématicien : déterminer le comportement limite sans calculer tous les termes !**
  Si la limite existe, c'est le point fixe x_f de la fonction $f(x) = \mu x(1-x)$:

$$f(x_f) = x_f.$$

- Force du présent modèle : une visualisation facile du comportement limite.

Divergence :



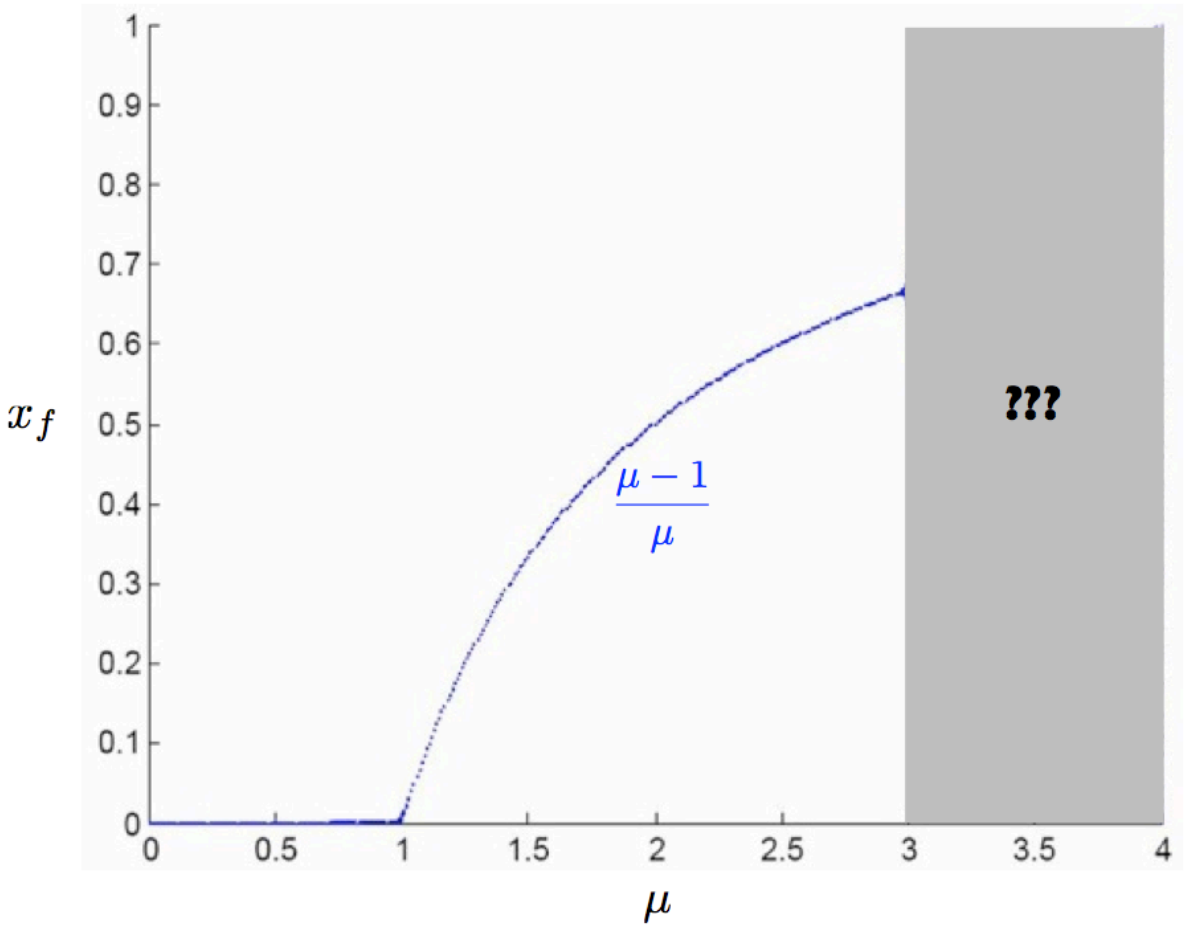
Il faut donc calculer x_1, x_2, ..., x_{100}, ..., $x_{100000000}$, ..., x_∞ !

- **Force du mathématicien : déterminer le comportement limite sans calculer tous les termes !**
  Si la limite existe, c'est le point fixe x_f de la fonction $f(x) = \mu x(1-x)$:

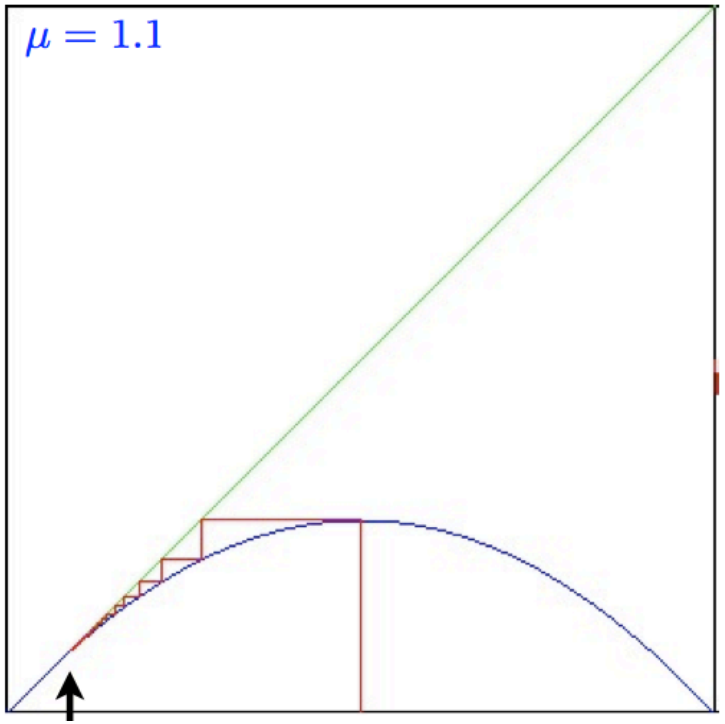
$$f(x_f) = x_f.$$

- Force du présent modèle : une visualisation facile du comportement limite.
- L'outil informatique : calcul rapide de la visualisation.

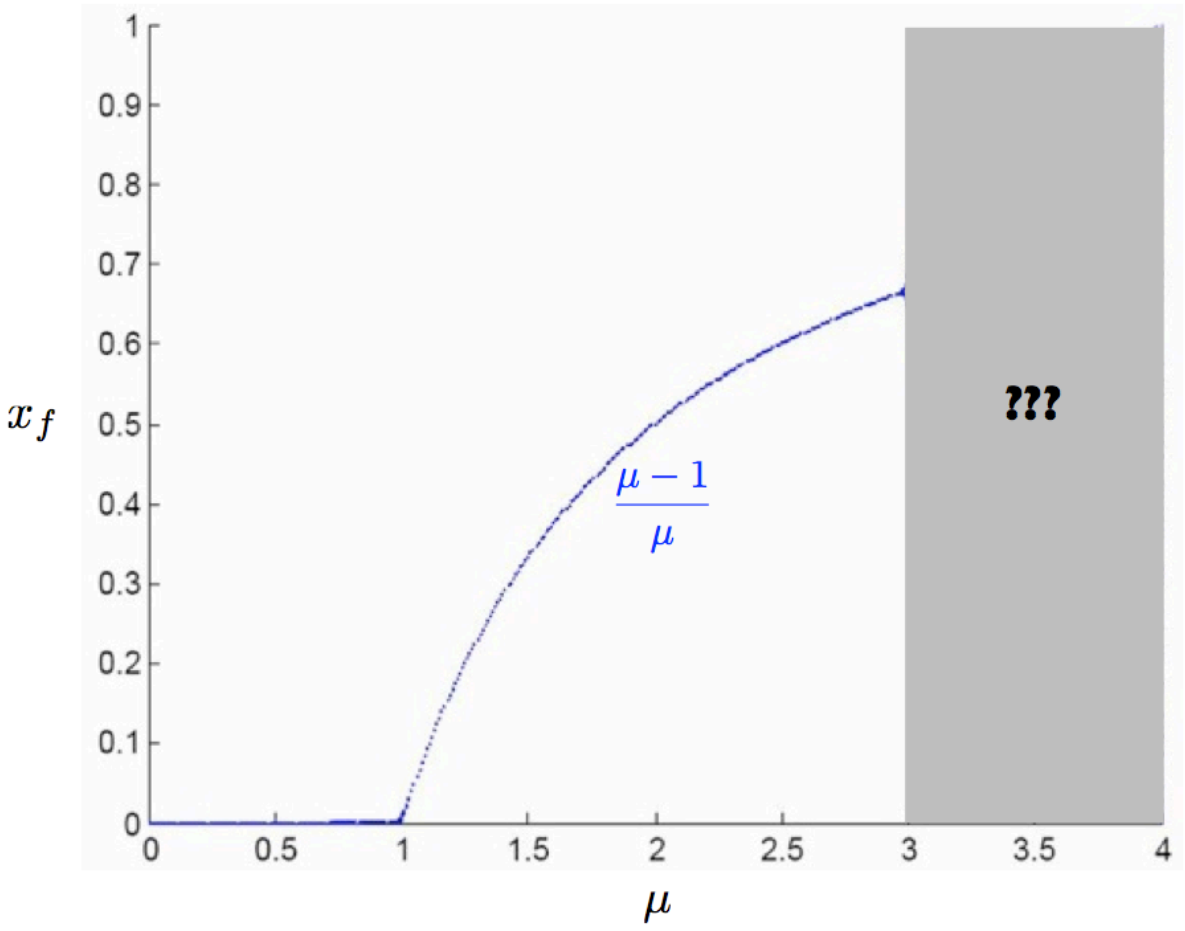
Visualisation informatique : la population limite en fonction du taux d'accroissement μ :



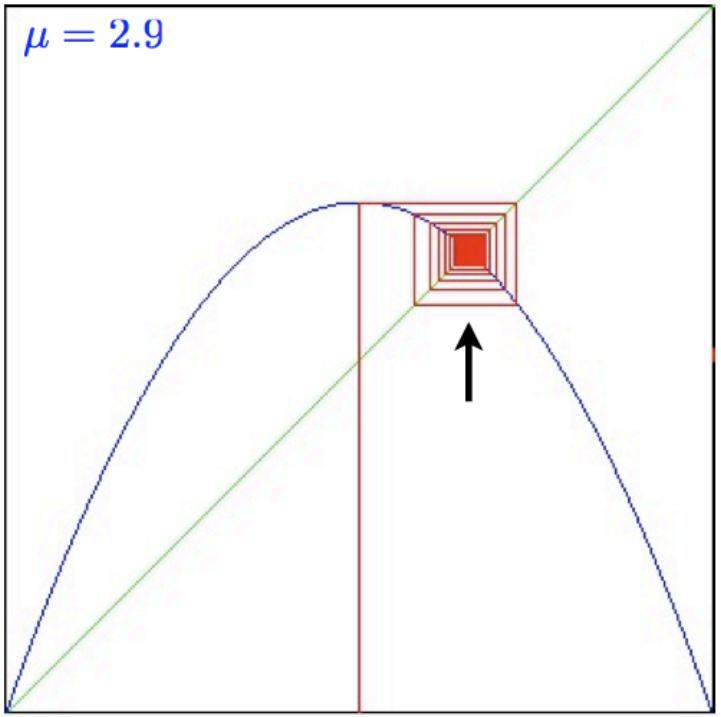
Visualisation informatique : la population limite en fonction du taux d'accroissement μ :



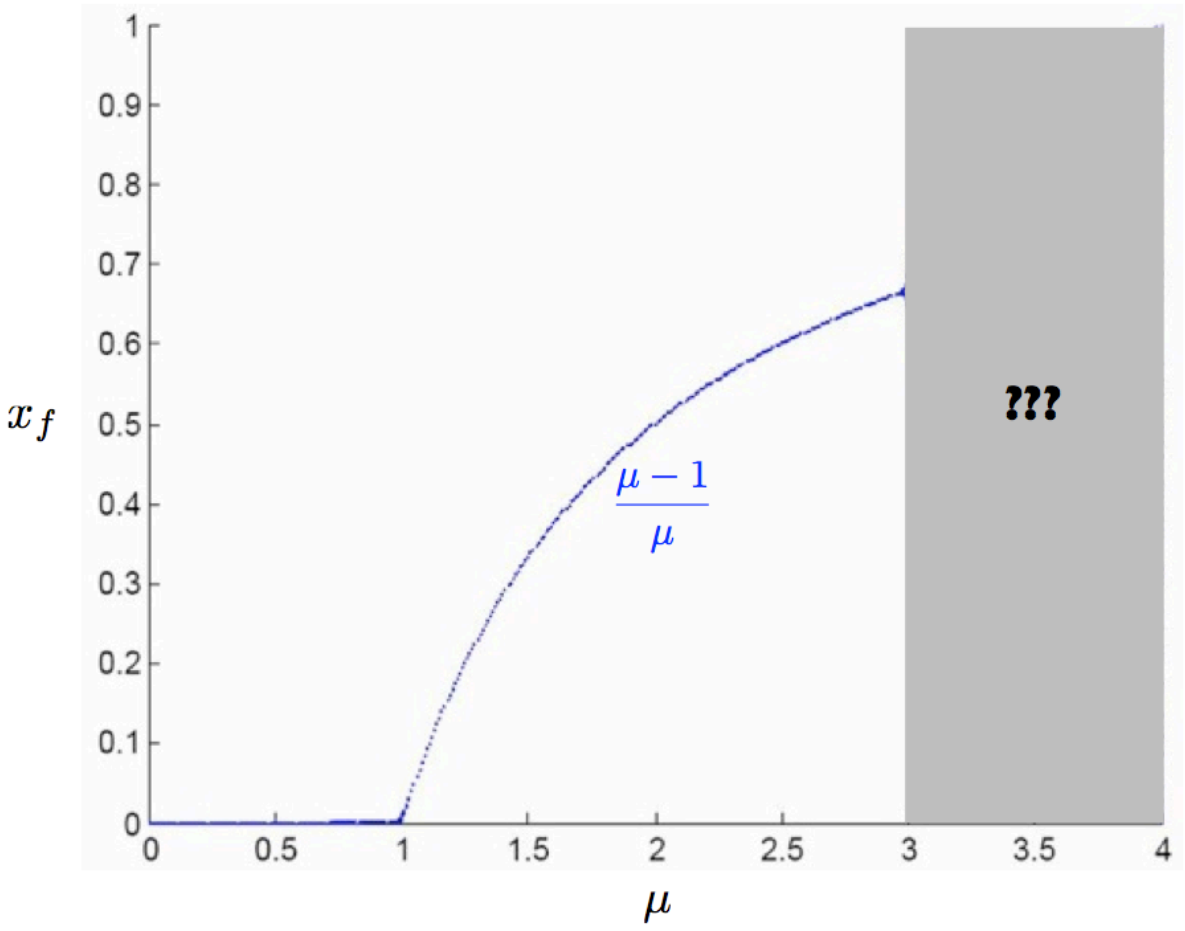
Visualisation informatique : la population limite en fonction du taux d'accroissement μ :



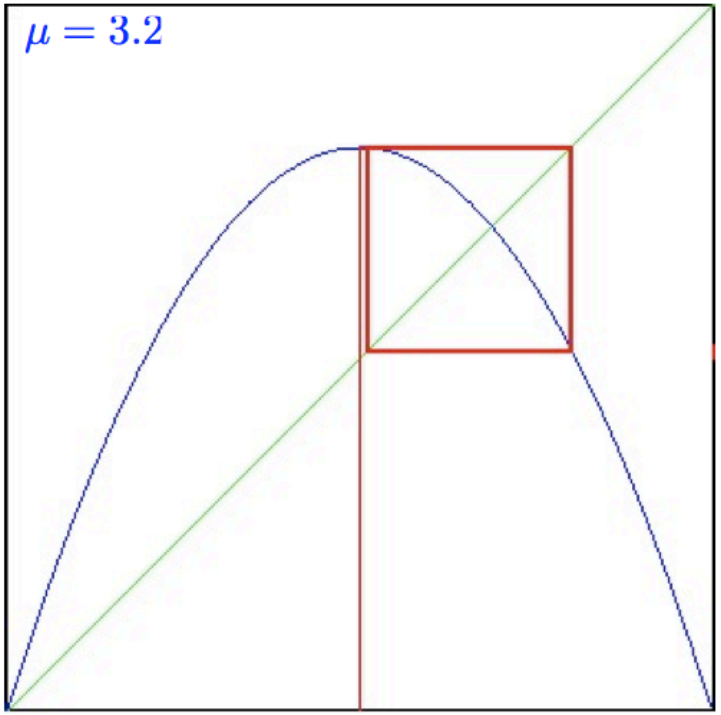
Visualisation informatique : la population limite en fonction du taux d'accroissement μ :



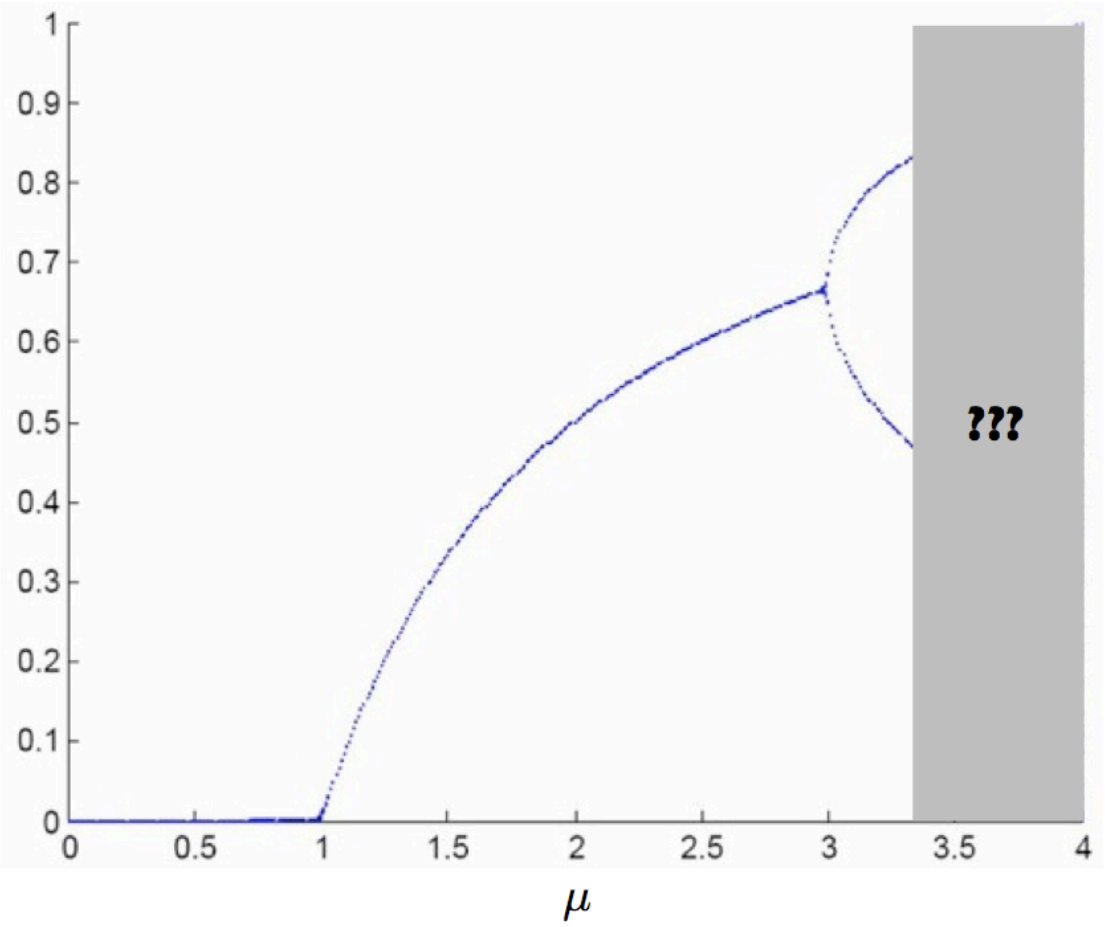
Visualisation informatique : la population limite en fonction du taux d'accroissement μ :



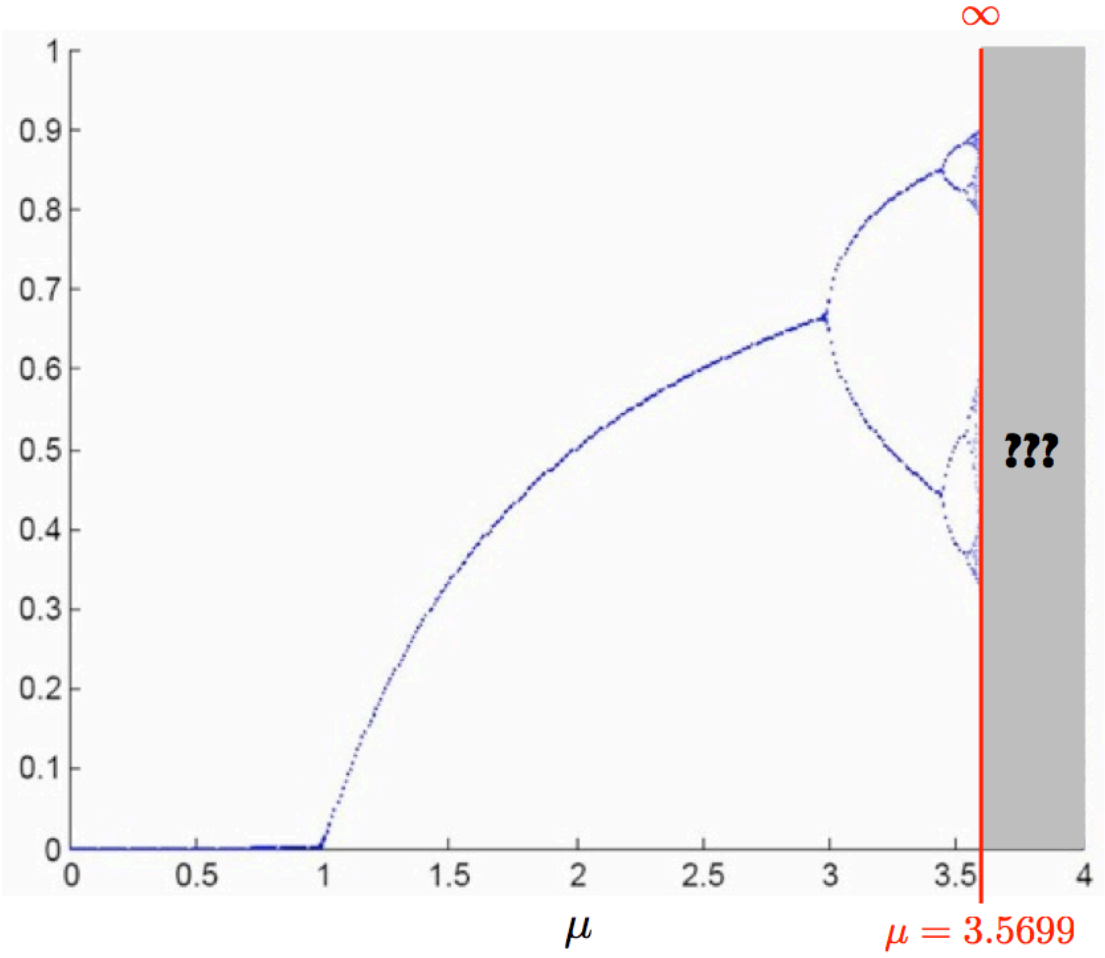
Visualisation informatique : la population limite en fonction du taux d'accroissement μ :



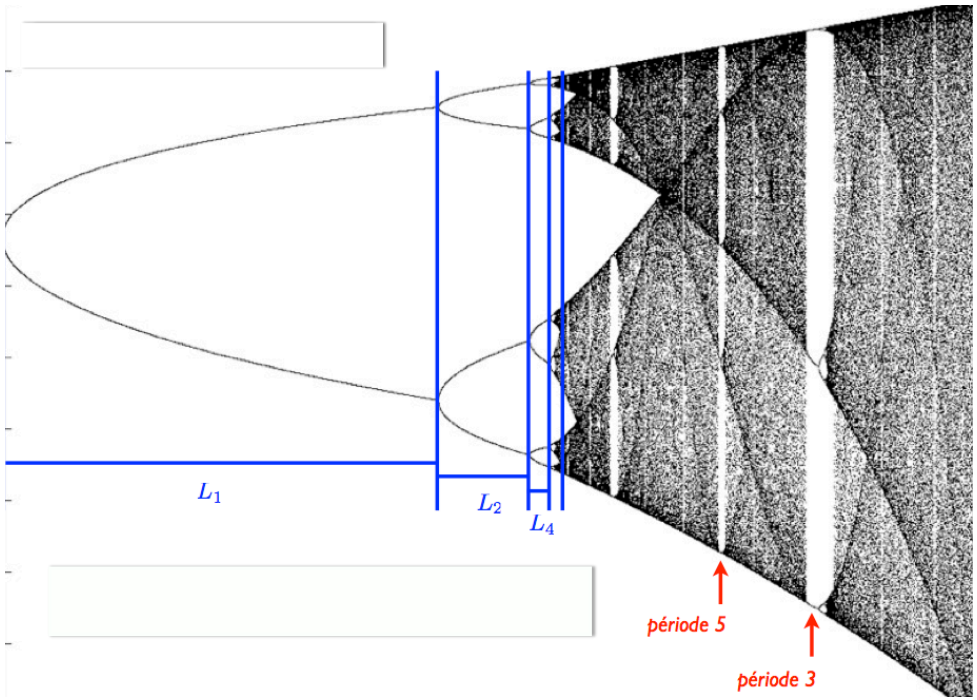
Visualisation informatique : la population limite en fonction du taux d'accroissement μ :



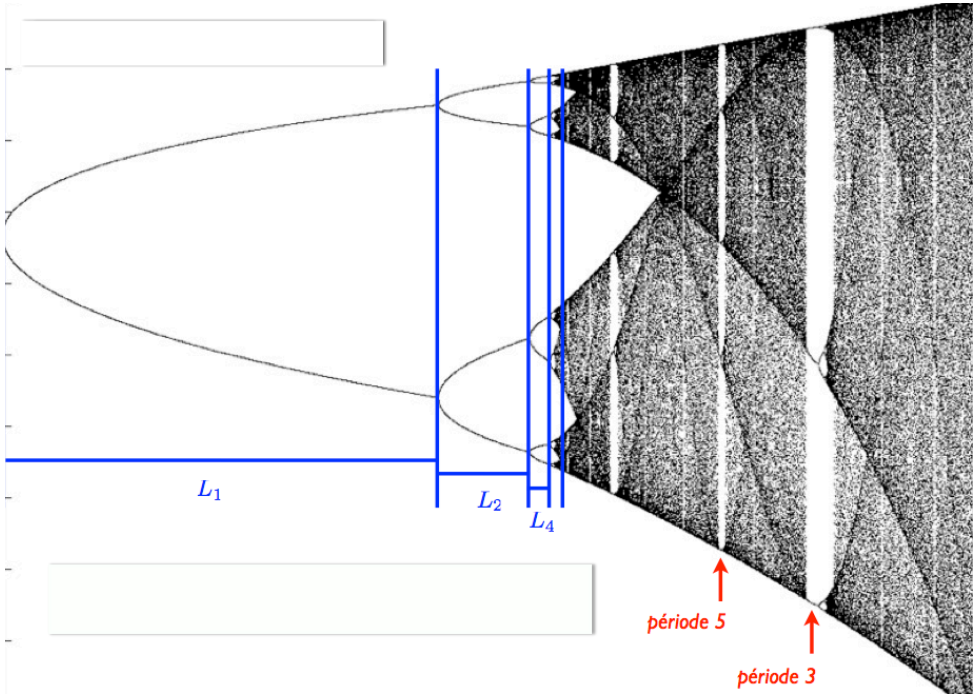
Visualisation informatique : la population limite en fonction du taux d'accroissement μ :



De l'ordre dans le désordre ! :
Une infinité de bifurcations...



De l'ordre dans le désordre ! :
Une infinité de bifurcations...



...mais

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{L_{n+1}} = 4,669\ldots \quad \text{(la constante de Feigenbaum).}$$

Expérimentons le chaos !

La machine à catastrophes de Zeeman

Évènement qui cause de graves bouleversements.
Accident jugé grave par la personne qui en subit les conséquences.
Évènement décisif qui amène le dénouement de la tragédie classique.

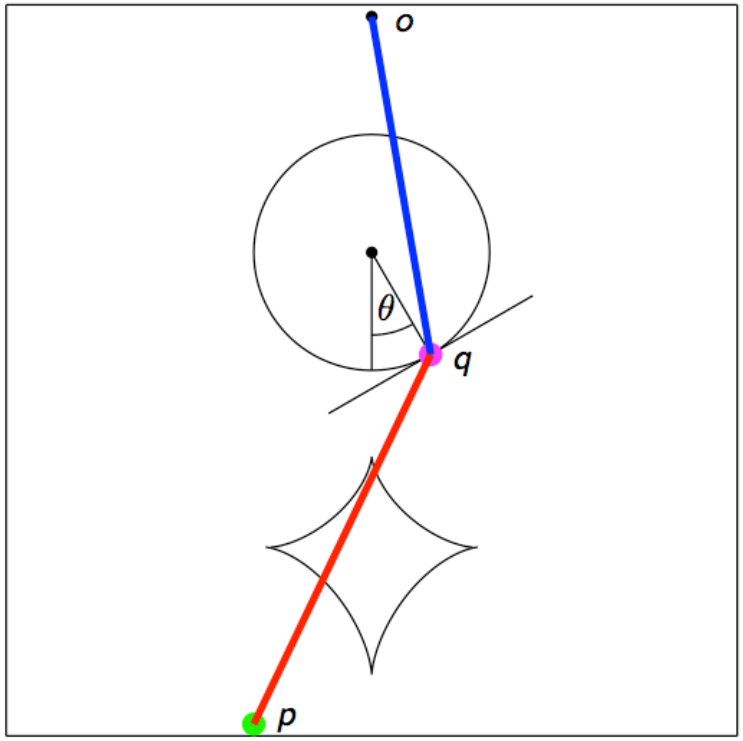
Expérimentons le chaos !

La machine à catastrophes de Zeeman

Évènement qui cause de graves bouleversements.
Accident jugé grave par la personne qui en subit les conséquences.
Évènement décisif qui amène le dénouement de la tragédie classique.

Expérimentons le chaos !

La machine à catastrophes de Zeeman

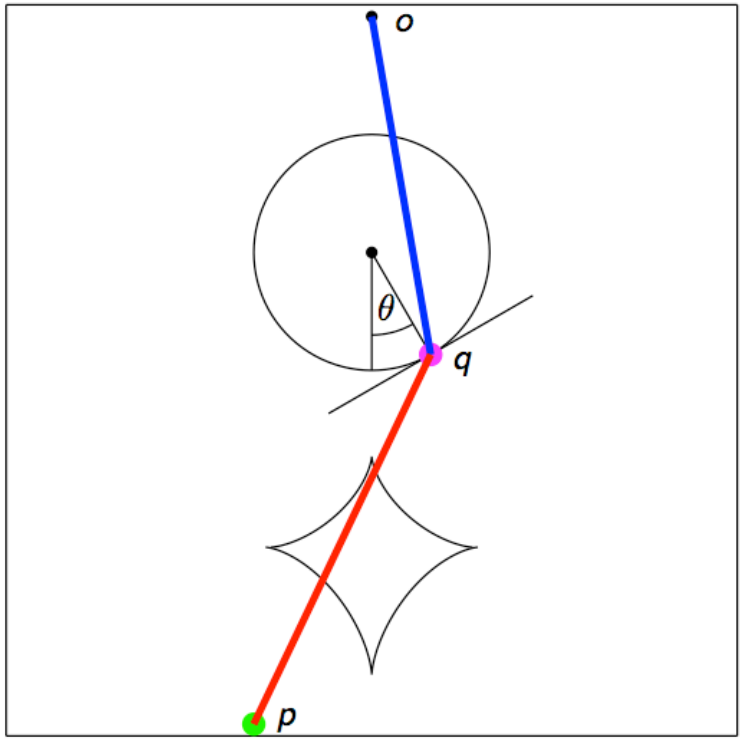


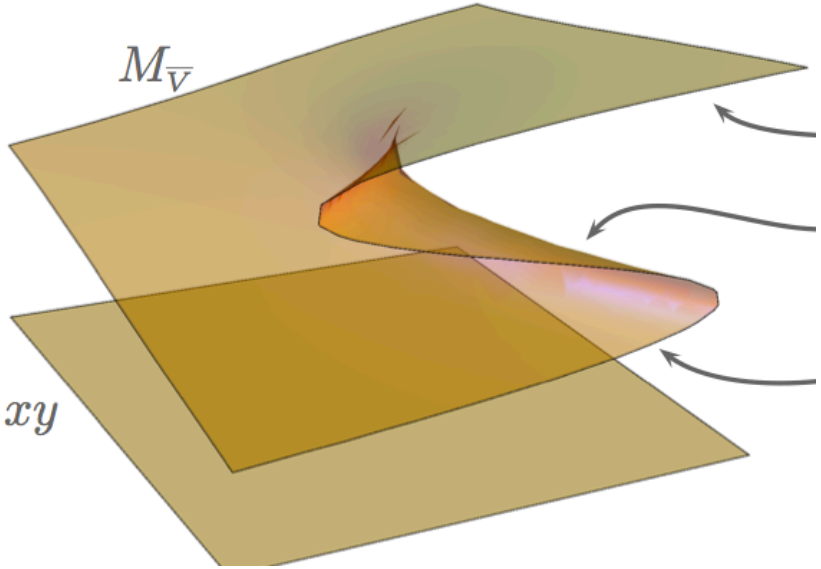
Lorsqu'on tire sur l'élastique rouge, on note parfois des mouvements surprenants...

L'équilibre est imposé par la minimisation de l'énergie potentielle des 2 élastiques.

Expérimentons le chaos !

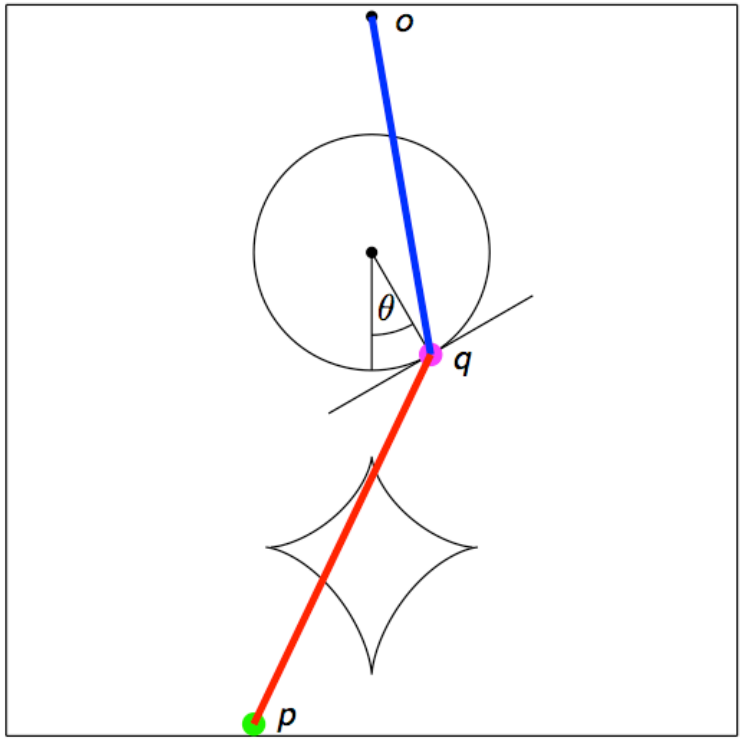
La machine à catastrophes de Zeeman

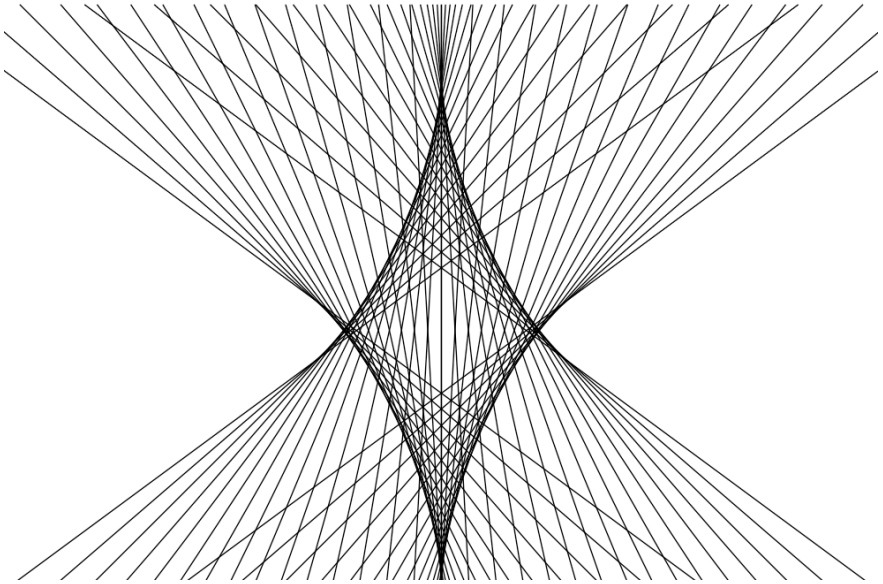


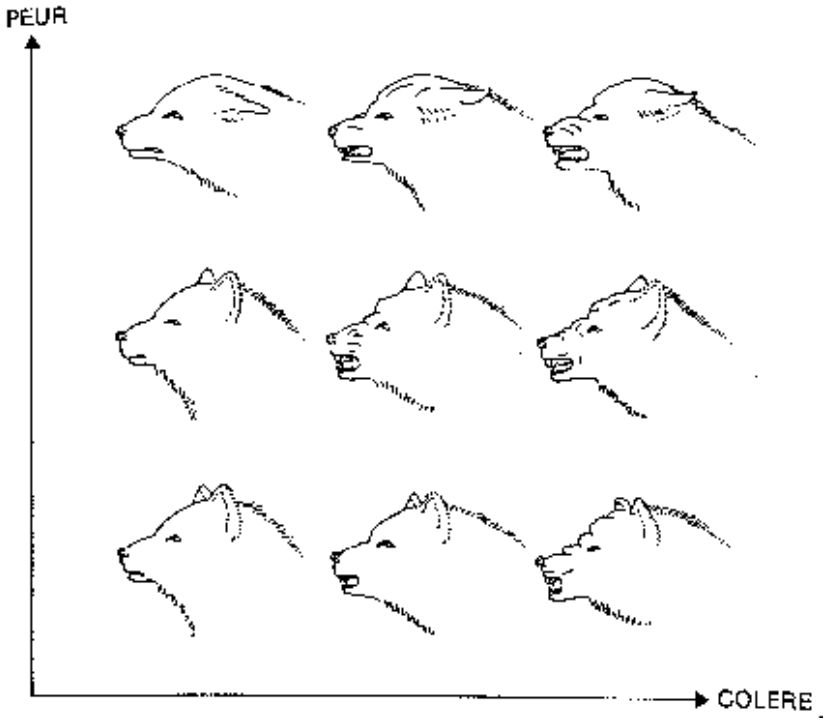
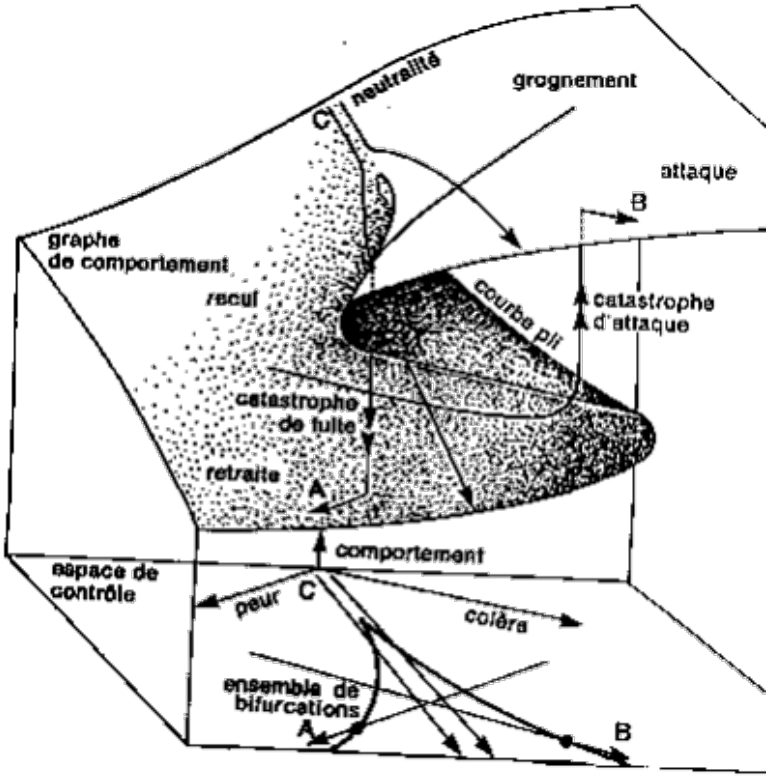


Expérimentons le chaos !

La machine à catastrophes de Zeeman





Expérimentons le chaos !

La même catastrophe... un autre cadre !