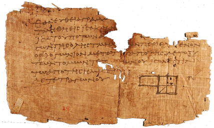
Une petite histoire de la géométrie : du 5ème axiome d'Euclide au GPS

Journée portes ouvertes

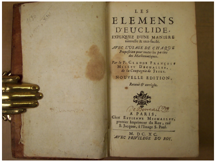
-

Les éléments de géométrie d'Euclide

- vécut à Athènes de -325 à -265 : auteur d'un des textes fondateurs des mathématiques

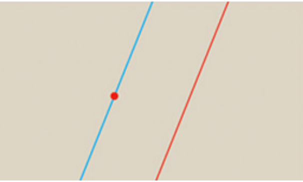


- Introduit le concept de géométrie à partir de 5 axiomes (données de base non démontrées)



Le cinquième axiome

- Par tout point extérieur à une droite donnée passe une unique droite parallèle

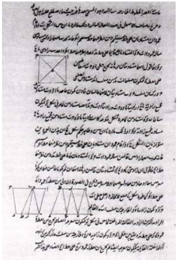


- Permet de démontrer que la somme des angles intérieurs d'un triangle est 180 degrés

- Quatre autres axiomes : incidence, ordre, congruence et continuité
- La question : dans quelle mesure a-t'on besoin de cet axiome ? ou ne découle-t-il pas des quatre autres ?
- A priori une question gratuite sur le système interne des mathématiques, voire une question philosophique à propos de “qu'est-ce que faire de la géométrie ?”
- Voire même une discussion de café...

Le doute plane...

- Posidonius et Geminus (1er siècle avant J-C.), Ptolémée (2ème siècle après J-C.), Proclus (4ème siècle)...
- Nasir al-Din al-Tusi (perse, 12ème siècle) :

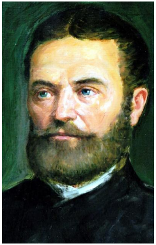


- Gauss (1777-1855), une des plus grande figure des mathématiques, est réputé être le premier à avoir su que l'on pouvait faire de la géométrie sans le 5ème axiome, alors que les quatre autres restent valables...

- Mais... il n'ose pas publier les conclusions de plus de 30 ans de travaux...

Plus de doute !

- Janos Bolyai (hongrois, 1802-1860)



- Écrit entre 1820 et 1823 un traité de "géométrie non euclidienne" : par un point extérieur à une droite donnée passent une infinité de droites parallèles à cette droite... Oups !

- Nikolai Lobatchevski (russe, 1792-1856)

- Publie en 1837 un article en français : "Géométrie imaginaire" dans lequel il présente un modèle de géométrie non euclidienne qu'il appelle géométrie hyperbolique... Oups ! Oups !

Le grand coup de balai...

- Bernhard Riemann (allemand, 1826-1866), LA légende des mathématiques...

- 1854, habilitation “Uber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen” (orientée par Gauss)

- D’après C. Hermite : “l’auteur dépasse infiniment la question du postulat d’Euclide...”, “Riemann aborde la considération de l’espace ou d’une multiplicité à un nombre quelconque de dimensions, il en établit le caractère essentiel consistant en ce que la position d’un point dépend de ce nombre de variables, et il étudie les mesures dont cet espace est susceptible”.

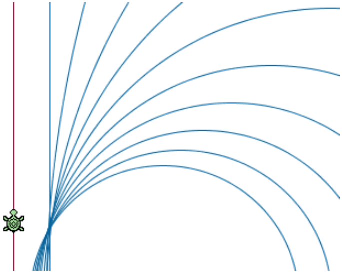
- Dans ce texte, B. Riemann introduit... les variétés riemanniennes !... La géométrie ne sera plus jamais la même...

Qu'est-ce qu'une droite ?

- Les éléments d'Euclide restent très évasifs sur la nature des objets impliqués dans les axiomes.
- "On prend 3 systèmes d'objets que l'on nommera des points, des droites et des plans. Remarquez qu'on pourrait aussi bien les appeler tables, chaises et verres de bière et aboutir aux mêmes conclusion" (D. Hilbert).
- Le meilleur exemple est celui du point et sur lequel nous glisserons très pudiquement... "On sait bien qu'un point analytique est plus gros qu'un point algébrique" (P. Deligne).
- "La science n'a pas pour objet des concepts, mais des fonctions qui se présentent comme des propositions dans des systèmes discursifs" (G. Deleuze).
- Pas qu'un simple "amusement métamathématique"..."nous présentons une nouvelle notion d'espace géométrique qui en abandonnant le rôle central joué par les points de l'espace permet une plus grande liberté dans la description de l'espace temps à courte échelle" (A. Connes).

Et alors ?

- Comment définir géométriquement une droite de sorte que le 5ème axiome prenne du sens dans des cadres géométriques plus généraux ?
- Deux propriétés fondamentales des droites du plan : ce sont les courbes qui réalisent le plus court chemin entre deux points et qui décrivent le mouvement rectiligne et uniforme correspondant à une accélération nulle.
- Ces deux propriétés sont (plus ou moins) équivalentes dans le cadre de la géométrie de Riemann : elles caractérisent les courbes géodésiques.
- En géométrie non euclidienne hyperbolique, par un point extérieur à une géodésique donnée passent une infinité de géodésiques ne la recontrant pas :



Les conséquences pratiques me direz-vous...

- L'espace temps introduit par A. Einstein pour décrire la relativité générale est une variété riemannienne... un espace muni d'une géométrie non euclidienne. Les particules de lumière, les photons, décrivent des géodésiques qui ne sont pas des droites mais des courbes tordues par le champ de gravitation. La notion de droite à la Euclide n'a aucun sens dans cet espace géométrique.

$$G_{\alpha\beta} = -\kappa T_{\alpha\beta}$$

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$$

- Pour fonctionner correctement un GPS doit utiliser le fait que la géométrie de l'espace temps est non euclidienne !
- 2300 ans de mathématiques : "Vous êtes arrivés à destination"
- Fin de l'histoire ? Fin d'un tome ! Si les mathématiciens du 19ème siècle ont découvert la géométrie non euclidienne, ceux du 20ème siècle ont découvert la géométrie non commutative... (cf la citation d'A. Connes).