

# Mathématiques pour l'Homme et la Terre



**Semaine des mathématiques - mars 2013**

**Michel Berthier**

-



Qui peut le moins peut le plus : grande unification et théorie des groupes

Cosmos 1999 : la stabilité du système solaire

La matrice... de la neurogéométrie

Euclide et le GPS.

---

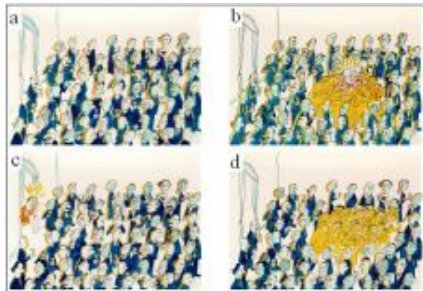




FERMIONS	LEPTONS (sensibles à la force faible)		QUARKS (sensibles à toutes les forces)	
1 <sup>ère</sup> Génération (matière ordinaire)	Electron 	Neutrino 	Up 	Down 
2 <sup>ème</sup> Génération	Muon 	Neutrino 	Strange 	Charmed 
3 <sup>ème</sup> Génération	Tau 	Neutrino 	Bottom 	Top 
BOSONS DE GAUGES	Photon (électromagnétisme) 	8 Gluons (force forte) 	W <sup>+</sup> W <sup>-</sup> Z <sup>0</sup> (force faible) 	Higgs (masse) 

- Électromagnétisme : photon
- Interactions faibles :  $W^+$ ,  $W^-$  et  $Z^0$
- Interactions fortes : 8 gluons
- Gravitation : graviton ?
- Que vient faire Higgs dans l'histoire ?

- Trois groupes :  $U(1)$ ,  $SU(2)$  et  $SU(3)$  de dimension... 1, 3 et 8!
- $U(1)$  → changement de phase.
- $SU(2)$  → rotations de  $\mathbb{R}^3$ , spin.
- $SU(3)$  → couleurs des quarks (dont l'existence a été prédite par les représentations du groupe).
- Brisure de symétrie : on ajoute un terme (un champ scalaire) au lagrangien électrofaible ( $U(1) \times SU(2)$ ) pour donner de la masse aux bosons  $W^+$ ,  $W^-$  et  $Z^0$  (en gardant l'invariance de jauge)...
- N.B. : pas de brisure de symétrie pour le lagrangien de l'électromagnétisme car le photon n'a pas de masse.
- Mais...



- L'existence d'un boson de Higgs est une conséquence obligée du mécanisme de brisure de symétrie.
- Haut : particule qui interagit avec le champ de Higgs.

- Bas : boson de Higgs, rumeur qui acquiert de la masse en interagissant avec le champ de Higgs.
- CERN : "Les particules élémentaires doivent peut-être leur masse à l'insaisissable boson de Higgs, sur le point d'être débusqué au CERN".
- Le 4 juillet 2012, le LHC a observé une nouvelle particule dont la masse est d'environ 126 Gev...
- "Exclure l'existence du boson de Higgs, [...], amènerait les théoriciens à élaborer de nouvelles théories pour expliquer l'origine de la masse des particules élémentaires".
- D'autres modèles mathématiques : théorie des cordes d'E. Witten ou géométrie non commutative d'A. Connes.

Le Point.fr

**EN CONTINU**  

- 24h d'Info
- Flux RSS
- Mobile
- Newsletters

**LE MAGAZINE**  

- Sommaire
- Abonnement
- Édition digitale
- Nos hors-séries

**LES SERVICES**  

- Météo
- Bourse
- Jeux-Concours
- Programme M6

ACTUALITÉ | POLITIQUE | ÉCONOMIE | TECH & NET | SANTÉ | SPORTS | CULTURE | ART DE VIVRE

Actualité | International | Société | Médias | Sciences | Villes | Insolites | Confidentiels | Ces gens-là

Presse

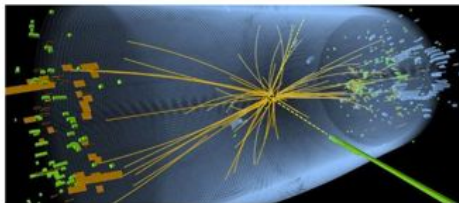
## Vos journaux sur tous les écrans

ACTUALITÉ > Sciences RSS

Le Point.fr - Publié le 22/02/2013 à 18:06 - Modifié le 24/02/2013 à 12:28

## Le boson de Higgs, messenger de l'apocalypse ?

La "particule de Dieu" découverte, l'été dernier, par les physiciens du Cern prèdirait un destin tragique à l'univers tel que nous le connaissons.



Représentation graphique d'une collision proton-proton réalisée dans un accélérateur de particules pour faire apparaître le boson de Higgs. © © CERN / AFP

## M Sciences

SCENCES Archéologie Biologie Cosmos Géologie Mathématiques Médecine Paléontologie

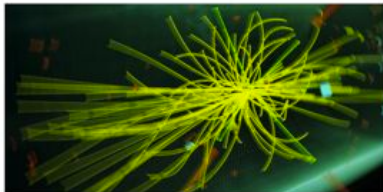
### Le boson de Higgs découvert avec 99,9999 % de certitude

Le Monde.fr | 04.07.2012 à 09h26 • Mis à jour le 04.07.2012 à 13h39

Par David Larousserie - Genève, envoyé spécial

Abonné vous a partir de 1 € Réagir Classer Imprimer Envoyer Partager

Recommander Envoyer 4 575 personnes le recommandent. Inscription pour voir ce que vos amis recommandent.



Cette fois, il n'y a plus de doute. Une nouvelle particule a bien été découverte au Centre européen de recherche nucléaire (CERN), près de Genève, grâce à l'accélérateur de particules LHC et ses deux principaux détecteurs, Atlas et CMS.





## Un peu moins ambitieux... la stabilité du système solaire

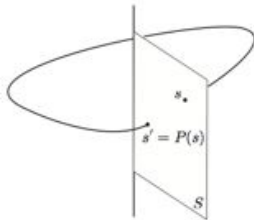


- "En 1999, la Terre entrepose ses déchets nucléaires sur la Lune où elle a déjà installé une base lunaire nommée Alpha. Le 13 septembre, une explosion de ces stocks provoque une telle réaction en chaîne que la Lune quitte l'orbite terrestre puis le système solaire. Dans l'incapacité de regagner la Terre, les 311 survivants commandés par le charismatique commandant Koenig, errent sur l'astre dans le cosmos et affrontent toutes sortes de dangers."

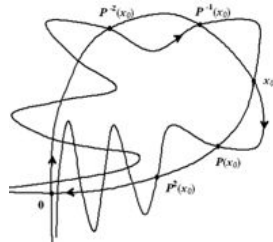
- L'équation de Newton

$$m_j \ddot{x}_j = -G \sum_{k \neq j}^n \frac{m_j m_k (x_j - x_k)}{|x_j - x_k|^3}$$

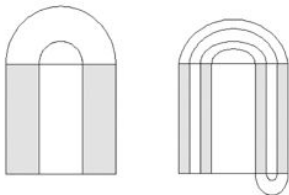
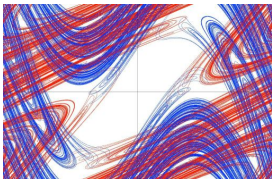
- Problème des trois corps (H. Poincaré) : Soleil, Terre et Lune. Introduction de l'application "de premier retour".



- Permet de ramener l'étude d'un système dynamique continu en dimension 3 (équation différentielle) à l'étude d'un système dynamique discret en dimension 2 (itérations d'un difféomorphisme).
- Solution périodique  $\rightarrow$  point fixe. La dynamique s'organise autour du point fixe.



- "Chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir couper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé par la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer" (1889).
- Bifurcation homocline :
- Modèle simple pour décrire et étudier la complexité de ce phénomène : le fer à cheval de S. Smale.



- C'est le premier exemple historique de système chaotique : très forte sensibilité aux conditions initiales.
- La stabilité dépend des dimensions de Hausdorff des ensembles de Cantor invariants que l'on obtient à la limite.

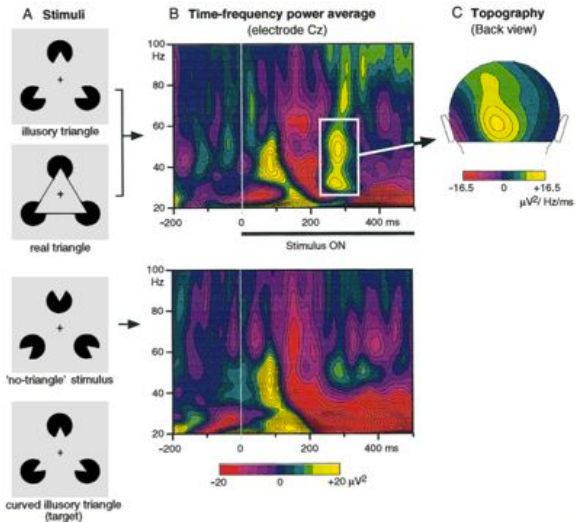


A peine délirant... Créer mathématiquement de la vision



"You know... I know this steak doesn't exist..."





- Problématique : comprendre comment le système visuel humain crée de la géométrie là où a priori il n'y en a pas.
- Processus en deux temps :
  1. Les tours de neurones du cortex visuel font une analyse de type ondelette (Fourier local multi-échelle). C'est le même type d'analyse que pour la compression JPEG 2000.
  2. Dans un deuxième temps, ces analyses sont connectées par une structure de contact dans un fibré (dont la fibre est l'ensemble des directions).
- Très grossièrement, une courbe est "vue" comme l'ensemble de ses tangentes que la structure de contact intègre...
- Liens avec la fonctionnelle introduite par D. Mumford et J. Shah

$$E(u) = \lambda \int_{\Omega} (f - u)^2 dx + \int_{\Omega \setminus S_u} |\nabla u|^2 dx + \nu \mathcal{H}^1(S_u)$$



permettant d'approximer une image  $f$  par une image  $u$  lisse par morceaux.

- Expérience de vision "entoptique" simulée sous LSD :
- Le résultat de la simulation grâce au modèle mathématique :



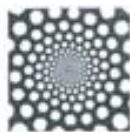
(i)



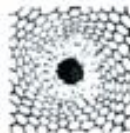
(ii)



(a)



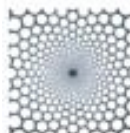
(b)



(iii)



(iv)



(c)



(d)



## Une brève histoire de la géométrie



2300 ans d'histoire pour s'entendre dire "dong...dong... vous dépassez la vitesse autorisée!"

- Début de l'histoire : les éléments d'Euclide (-325 à -265) et le cinquième axiome...
- Par tout point extérieur à une droite donnée passe une unique droite parallèle



- Quatre autres axiomes : incidence, ordre, congruence et continuité
  - La question : dans quelle mesure a-t-on besoin de cet axiome ? ou ne découle-t-il pas des quatre autres ?
  - A priori une question gratuite sur le système interne des mathématiques, voire une question philosophique à propos de "qu'est-ce que faire de la géométrie ?"
  - Voir même une discussion de café...
- Permet de démontrer que la somme des angles intérieurs d'un triangle est 180 degrés

- Le héros, B. Riemann (1826 à 1866) : repenser la notion d'espaces et de mesures
- Bernhard Riemann (allemand), LA légende des mathématiques...



- 1854, habilitation "Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen" (orientée par Gauss)
- D'après C. Hermite : "l'auteur dépasse infiniment la question du postulat d'Euclide...", "Riemann aborde la considération de l'espace ou d'une multiplicité à un nombre quelconque de dimensions, il en établit le caractère essentiel consistant en ce que la position d'un point dépend de ce nombre de variables, et il étudie les mesures dont cet espace est susceptible".
- Dans ce texte, B. Riemann introduit... les variétés riemanniennes!... La géométrie ne sera plus jamais la même...

- Les nouvelles droites de la géométrie : les géodésiques
- Comment définir géométriquement une droite de sorte que le 5ème axiome prenne du sens dans des cadres géométriques plus généraux ?
- Deux propriétés fondamentales des droites du plan : ce sont les courbes qui réalisent le plus court chemin entre deux points et qui décrivent le mouvement rectiligne et uniforme correspondant à une accélération nulle.
- Ces deux propriétés sont (plus ou moins) équivalentes dans le cadre de la géométrie de Riemann : elles caractérisent les courbes géodésiques.
- En géométrie non euclidienne hyperbolique, par un point extérieur à une géodésique donnée passent une infinité de géodésiques ne la reconstrant pas :



- La géométrie riemannienne, la relativité générale et le GPS
- L'espace temps introduit par A. Einstein pour décrire la relativité générale est une variété riemannienne... un espace muni d'une géométrie non euclidienne. Les particules de lumière, les photons, décrivent des géodésiques qui ne sont pas des droites mais des courbes tordues par le champ de gravitation. La notion de droite à la Euclide n'a aucun sens dans cet espace géométrique.
- Pour fonctionner correctement un GPS doit utiliser le fait que la géométrie de l'espace temps est non euclidienne!
- Fin de l'histoire? Fin d'un tome! Si les mathématiciens du 19ème siècle ont découvert la géométrie non euclidienne, ceux du 20ème siècle ont découvert la géométrie non commutative...

$$G_{\alpha\beta} = -\kappa T_{\alpha\beta} \quad G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$$